En la literatura geodésica en lengua inglesa es frecuente encontrar la notación $e$, $n$, $u$ [3]para este tipo de coordenadas.

Este sistema de coordenadas puede considerarse una aproximación del sistema astronómico local. La diferencia en dirección entre los respectivos ejes $z$ depende de la desviación de la vertical en el punto de estación. Si la exactitud en la verticalización del instrumento empleado es inferior al valor de la desviación de la vertical, ambos sistemas pueden utilizarse indistintamente sin pérdida de precisión. En cualquier caso, la relación entre ambos sistemas viene dada por la ecuación 4.40.

Para distinguir las coordenadas astronómicas de las geodésicas se considerará la siguiente notación[4]:

| | **Sistema astronómico local** | **Sistema geodésico local** |
|---|---|---|
| Coordenadas cartesianas | $x_{ij}^{A}, y_{ij}^{A}, z_{ij}^{A}$ | $x_{ij}^{G}, y_{ij}^{G}, z_{ij}^{G}$ |
| Coordenada polar acimut | $\alpha_{ij}^{A},\ o\ A_{ij}^{A}$ | $\alpha_{ij}^{G},\ o\ \theta_{ij}^{G}$ |
| Coordenada polar cenital | $\beta_{ij}^{A},\ o\ V_{ij}^{A}$ | $\beta_{ij}^{G},\ o\ V_{ij}^{G}$ |

El vector definido por el punto origen y el punto observado se puede expresar en este sistema, al igual que en astronómico local, en coordenadas polares o cartesianas. La relación entre entre ambos tipos de coordenadas sigue siendo la expresada por las ecuaciones 4.1 y 4.2

### 4.2.4. Coordenadas cartesianas geocéntricas

A diferencia de los sistemas de coordenadas topocéntricos, de carácter local y especialmente útiles para referir las mediciones clásicas, el sistema de coordenadas cartesiano geocéntrico se establece para expresar la situación de un punto respecto al sistema de referencia geodésico. El sistema de coordenadas cartesiano geocéntrico se define, tal y como ilustra la figura 4.3, a partir de:

- Origen en el geocentro.
- Eje $Z$ coincidente con el eje de rotación y perpendicular al plano $XY$, plano del ecuador.
- Eje $X$ en el plano $Z = 0$, orientado en la dirección del meridiano de Greenwich.
- Eje $Y$ en el plano $Z = 0$, perpendicular a los dos anteriores y con sentido tal que completa con ellos una terna dextrógira.

Este sistema de coordenadas, conocido y empleado desde los inicios de la geodesia, ha cobrado especial relevancia a partir del empleo de mediciones geodésicas espaciales. Es especialmente útil para el tratamiento de las mediciones espaciales, asi como la expresión de las órbitas de satélites artificiales. Ahora bien, no es el sistema más adecuado para la mayor parte de las aplicaciones cartográficas, ya que en él carecen de sentido los conceptos de planimetría y altimetría.

### 4.2.5. Coordenadas UTM

Para definir la situación planimétrica de puntos sobre la superficie del elipsoide de referencia se emplean las coordenadas geodésicas $(\varphi, \lambda)$. Pero la superficie del elipsoide no puede ser representada sobre una superficie plana sin experimentar algún tipo de deformación y por ello se recurre a las proyecciones.

La proyección oficial para la cartografía española es la transversa de mercator o UTM[5].

[3] *Easting* (hacia el este), *northing* (hacia el norte) y *upping* ( hacia arriba). Como se observa, también cambía el orden de las respectivas coordenadas.

[4] La distancia geométrica depende de la métrica del sistema de referencia y es un invariante frente a la elección del origen y base del mismo.

[5] Universal Transverse Mercator.

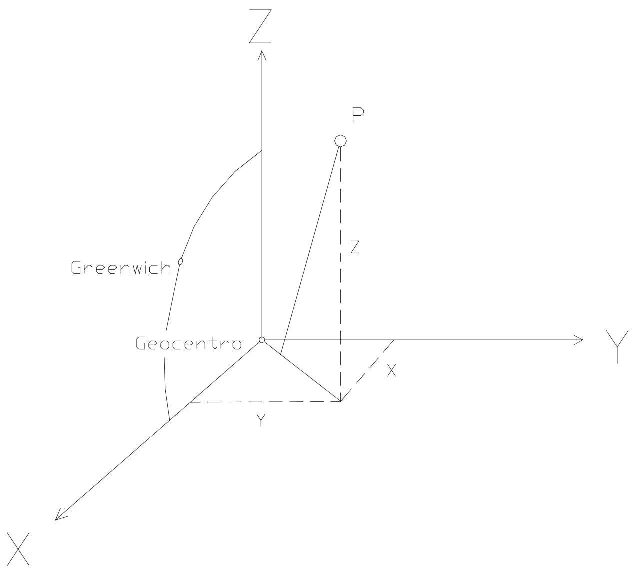


Figura 4.3: Sistema cartesiano geocéntrico

Las proyección UTM asigna a cada punto de coordenadas $(\varphi, \lambda)$ unas coordenadas cartesianas $(x, y)$ sobre un plano, siguiendo unas determinadas condiciones de conformidad [SGE76] [YST00].

$$x = x(\varphi, \lambda)$$

$$y = y(\varphi, \lambda)$$

## 4.3. Coordenadas curvilíneas

### 4.3.1. Concepto general

La situación de un punto en el espacio tridimensional queda definida a partir de tres coordenadas o parámetros. Existen múltiples modos de asignar esas tres coordenadas y cada uno de ellos constituye un sistema de coordenadas. Manteniendo constantes dos de las tres coordenadas, la variación de la tercera representa una curva en el espacio. A dicha curva se la denomina línea coordenada o curva paramétrica. Por cada punto siempre pasan tres líneas coordenadas $L1$, $L2$, $L3$, también denominadas $x_1$-curva, en la que únicamente varía $x_1$, $x_2$-curva, en la que únicamente varía $x_2$, y $x_3$-curva, en la que únicamente varía $x_3$:

$$\begin{aligned} L1 \quad &: \quad = \{(x_1, x_2, x_3) \,|x_2 = cte., x_3 = cte\} \equiv x_1 - curva \\ L2 \quad &: \quad = \{(x_1, x_2, x_3) \,|x_1 = cte., x_3 = cte\} \equiv x_2 - curva \\ L3 \quad &: \quad = \{(x_1, x_2, x_3) \,|x_1 = cte., x_1 = cte\} \equiv x_3 - curva \end{aligned}$$

Elegida una parametrización, si las tres líneas coordenadas son rectas, el sistema de coordenadas definido se denomina cartesiano. Si al menos una de las curvas paramétricas no es una recta el sistema de coordenadas definido es curvilíneo.

A continuación se describen los sistemas de coordenadas curvilíneas más utilizados en geodesia.

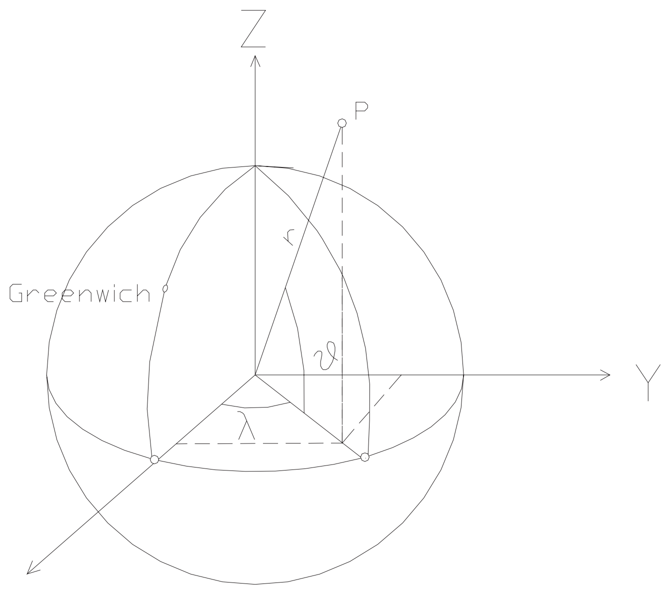


Figura 4.4: Coordenadas esféricas

## 4.3.2. Coordenadas esféricas

### 4.3.2.1. Sistemas terrestres

A partir de un sistema de coordenadas cartesiano geocéntrico como se define en la sección 4.2.4 se pueden definir, de acuerdo a la figura 4.4, un sistema de coordenadas esféricas o polares $(\vartheta, \lambda, r)$:

- $\vartheta$ latitud esférica o ángulo que forma el vector de posición con el plano del ecuador, tal como muestra la figura 4.4. Su dominio se suele establecer en $-\pi < \vartheta < \pi$. A veces se emplea la denominada distancia polar o ángulo que forman el eje $Z$ y el vector de posición del punto y cuyo dominio se suele establecer en $0 < \vartheta < \pi$.
- $\lambda$ ángulo que forma el plano definido por contener al eje $Z$ y al vector de posición del punto, plano meridiano del punto, con el plano $Y = 0$, es la denominada coordenada longitud. Su dominio se suele establecer en $-\pi < \lambda < \pi$.
- $r$ módulo del vector de posición del punto.

Las líneas coordenadas son:

- $\lambda$-curva: circunferencias paralelas al plano $Z = 0$, y tienen por radio $r \cos \vartheta$.
- $\vartheta$-curva: circunferencias que contienen el eje $Z$, al punto y tienen por radio $r$.
- $r$-curva: linea recta que contiene al punto y al origen del sistema de coordenadas cartesianas.

Este sistema de coordenadas se emplea en ciertas aplicaciones geodésicas, como por ejemplo la definición del campo gravitatorio en armónicos esféricos.

La relación directa y recíproca entre las coordenadas cartesianas geocéntricas y las coordenadas esféricas se deduce directamente de la figura 4.4:

Conversión $(X, Y, Z) \rightarrow (\vartheta, \lambda, r)$

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\
\vartheta &= \arccos \tfrac{Z}{r} \\
\lambda &= \arctan \tfrac{Y}{X}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

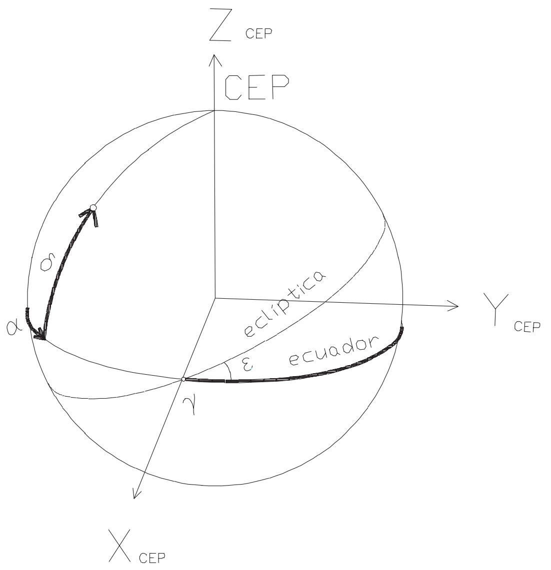


Figura 4.5: Coordenadas ecuatoriales absolutas

Conversión $(\vartheta, \lambda, r) \rightarrow (X, Y, Z)$

$$\begin{aligned} X &= r \sin\vartheta \cos\lambda \\ Y &= r \sin\vartheta \sin\lambda \\ Z &= r \cos\vartheta \end{aligned} \tag{4.4}$$

#### 4.3.2.2. Sistemas astronómicos

Los sistemas de coordenadas esféricos son fundamentales en astronomía de posición. Como no se utiliza la distancia a los astros, se emplea dejando indeterminada la coordenada $r$. De este modo, una estrella queda definida por su dirección, dada por las coordenadas $\vartheta$ y $\lambda$, que reciben un nombre y una notación diferente dependiendo del plano fundamental escogido.

**4.3.2.2.1. Coordenadas ecuatoriales absolutas** Tradicionalmente la situación de las estrellas respecto a la Tierra se ha definido mediante coordenadas ecuatoriales absolutas. Estas coordenadas emplean como plano fundamental el ecuador celeste o plano que conteniendo al geocentro es perpendicular al $CEP$[6]. Las coordenadas de este sistema son:

- *Ascensión recta*, $\alpha$. Ángulo medido en sentido directo a lo largo del ecuador celeste entre la dirección del punto $\Upsilon$ ( Aries ) y el meridiano del objeto celeste. Obsérvese que $\alpha$ equivale a $\lambda$ en la notación general. Su dominio se suele establecer en: $0 \leq \alpha < 2\pi$.

- *Declinación*, $\delta$. Ángulo que va desde el ecuador celeste hasta el objeto considerado medido en el meridiano celeste de éste último. Observese que $\delta = 90^o - \vartheta$ relaciona la declinación con la distancia polar de la notación general. Su dominio se suele establecer en: $\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}$.

La dirección del punto $\Upsilon$ queda definida por la intersección del plano ecuatorial celeste y el plano de la eclíptica, tal y como muestra la figura 4.5.

[6] *Celestial Ephemeris Pole*. Su definición y movimiento son tratados en el capítulo 4.

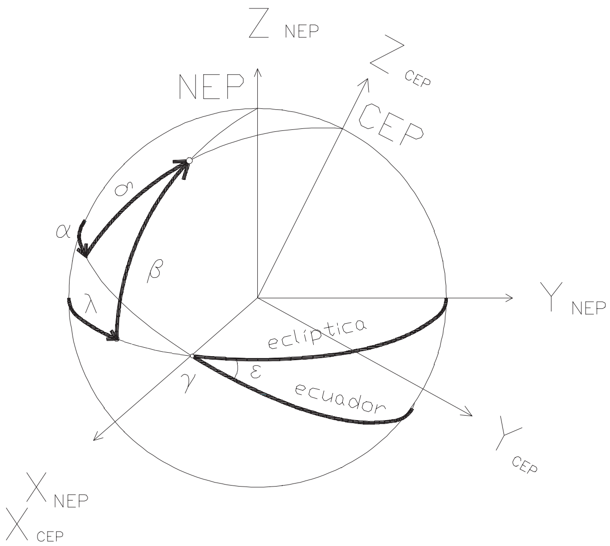


Figura 4.6: Relación entre coordenadas ecuatoriales absolutas y eclípticas

Este tipo de sistema de coordenadas es apropiado para describir la dirección en el espacio de objetos alejados de la Tierra,como las estrellas. Para objetos más cercanos, como los satélites artificiales, se recurre a un sistema de coordenadas cartesiano geocéntrico[7] asociado al $CEP$.

Las coordenadas ecuatoriales absolutas y las definidas por un triedro de coordenadas cartesianas geocéntricas cuyo eje $Z$ coincida con el $CEP$ y cuyo eje $X$ coincida con el punto $\gamma$, quedan relacionadas mediante,

$$\begin{aligned} X &= r\cos\delta\cos\alpha \\ Y &= r\cos\delta\sin\alpha \\ Z &= r\sin\delta \end{aligned} \tag{4.5}$$

y la relación recíproca,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ \alpha &= \arctan\tfrac{Y}{X} \\ \delta &= \arctan\tfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

**4.3.2.2.2. Coordenadas eclípticas** El polo $CEP$ cambia su dirección respecto al espacio exterior debido a los fenómenos de precesión y nutación [8]. Al variar la dirección del eje fundamental, también lo harán las coordenadas de los sistemas referidos a él. Por tanto es necesario definir un sistema de coordenadas cuya posición respecto al espacio exterior no varíe. Tradicionalmente se ha optado las denominadas coordenadas eclípticas.

El plano fundamental en el sistema de coordenadas eclípticas lo constituye la eclíptica o plano orbital de la Tierra respecto al Sol, de ahí su nombre. El plano de la eclíptica es perpendicular al polo $NEP$[9] o polo de la eclíptica. Considerando una esfera geocéntrica de radio unidad, la dirección de un objeto en el espacio espacial viene dado por sus coordenadas eclípticas, tal como muestra la figura 4.6:

[7] El uso de las técnicas espaciales de medición está favoreciendo el uso de sistemas cartesianos de coordenadas, frente a los tradicionales curvilíneos como las coordenadas ecuatoriales o las coordenadas eclípticas.

[8] Los conceptos de precesión y nutación son introducidos en el capítulo 4.

[9] La definición del *North Ephemeris Pole* se introduce en el capítulo 4.

- *Longitud eclíptica,* $\lambda$. Ángulo medido en el sentido directo en el plano de la eclíptica entre el punto $\Upsilon$ y el plano del círculo máximo que pasando por el objeto considerado contiene al $NEP$. Su dominio se suele establecer en: $0 \leq \lambda < 2\pi$.

- *Latitud eclíptica,* $\beta$. Ángulo medido a lo largo del circulo máximo que contiene al objeto considerado y al $NEP$ y que va desde el plano de la eclíptica hasta el objeto. Su dominio se suele establecer en: $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Éste tipo de coordenadas representan, incluso para las aplicaciones geodésicas de mayor precisión, un sistema prácticamente inercial o $CIS$[10] [See93].

Las coordenadas ecuatoriales absolutas y las definidas por un triedro de coordenadas cartesianas geocéntricas cuyo eje $Z$ coincida con el $CEP$ y cuyo eje $X$ coincida con el punto $\gamma$, quedan relacionadas mediante,

$$\begin{aligned} X &= r\cos\delta\cos\alpha \\ Y &= r\cos\delta\sin\alpha \\ Z &= r\sin\delta \end{aligned} \tag{4.7}$$

y la relación recíproca,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ \alpha &= \arctan\tfrac{Y}{X} \\ \delta &= \arctan\tfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

### 4.3.3. Coordenadas geodésicas

Si la Tierra fuese esférica, el sistema de coordenadas curvilíneas idóneo serían las coordenadas esféricas. En ese supuesto todos los puntos de la superfície tendrían la misma coordenada $r$, y los cambios en la misma representarían cambios en la separación de un punto respecto a la superfície. Pero, como se expuso en el capítulo 2, la superficie de referencia tradicionalmente escogida para calcular las redes geodésicas es el elipsoide de revolución.

El utilizar como superficie de referencia un elipsoide implica que a cada punto $P$ en el espacio se le hace corresponder una proyección $P_0$ sobre el elipsoide. La posición del punto $P_0$ se establece mediante dos coordenadas correspondientes a la parametrización de la superficie del elipsoide. La separación entre $P_0$ y $P$ viene dada por la altitud $h$.

Existen diferentes alternativas para parametrizar la superficie del elipsoide. Una de ellas es emplear las coordenadas geodésicas[11] $(\varphi, \lambda)$ junto a la altitud elipsoídica $h$, tal como muestra la figura 4.7.

A la tripleta de coordenadas $(\varphi, \lambda, h)$ se las suele denominar coordenadas geodésicas:

- *Latitud geodésica,* $\varphi$. Ángulo medido en el plano meridiano que forman la normal al elipsoide en el punto $P$ considerado y el plano del ecuador. En el sistema elipsoidal el plano meridiano es el definido por la normal al elipsoide y el propio eje de rotación, ya que ambas rectas se cortan en el espacio, formando un plano. Su dominio se suele establecer en: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

- *Longitud geodésica,* $\lambda$. Ángulo medido en el plano del ecuador en el sentido directo que forman el plano meridiano que contiene al punto $P$ considerado y el plano meridiano de Greenwich. Su dominio se suele establecer en: $-\pi < \lambda \leq \pi$.

[10] *Cuasi Inertial System.* La definición de los sistemas inerciales son tratados en el capítulo **??**

[11] Desde el punto de vista matemático el término coordenadas geodésicas se emplea en un sentido más general. Se denominan coordenadas geodésicas a aquellas cuyas curvas paramétricas son ortogonales y además una de las familias de dichas curvas constituyen líneas geodésicas.

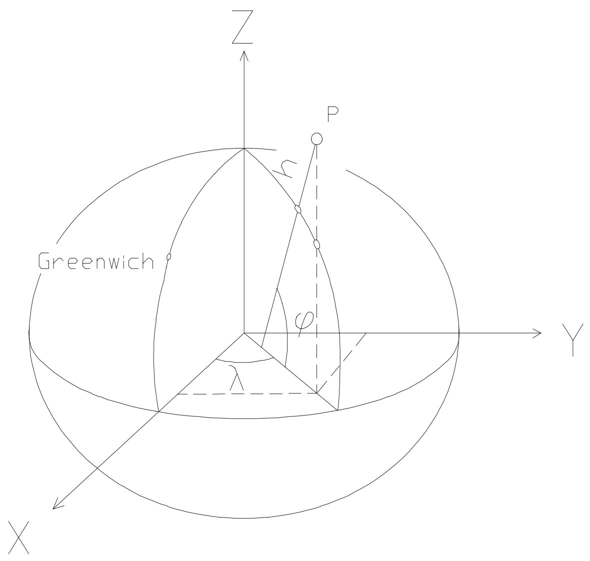


Figura 4.7: Coordenadas geodésicas

- *Altitud elipsoídica o elipsoidal*[12]*, h.* Distancia entre el punto $P$ considerado y el elipsoide, medida a lo largo de la normal al elipsoide que pasa por dicho punto. Este tipo de altitud no tiene ningún significado físico, solamente carácter geométrico.

Tal y como se estudiará en capítulos posteriores, la ventaja más importante de utilizar la superficie del elipsoide de revolución como superficie de referencia en geodesia es que se simplifican en gran medida muchas de las cuestiones tratadas en geodesia.

### 4.3.4. Coordenadas astronómicas

Aproximar la forma de la superficie de la Tierra por la de un elipsoide de revolución no es suficiente en ciertas aplicaciones. Es necesario introducir un sistema de coordenadas que tenga en cuenta el campo gravitatorio, responsable de la figura matemática de la Tierra o geoide. Las coordenadas astronómicas surgen como respuesta a la necesidad de encontrar un sistema natural de coordenadas asociado al campo gravitatorio.

Para definir éste sistema de coordenadas es necesario definir en primer lugar el concepto de *meridiano astronómico*. Se entiende por meridiano astronómico de un punto el plano que, conteniendo al vector gravedad en dicho punto, es paralelo al eje de rotación.

Un punto cualquiera $P$ viene definido en el sistema astronómico global por tres coordenadas, tal y como muestra la figura 4.8:

- *Latitud astronómica,* $\Phi$*.* Ángulo medido en el plano del meridiano astronómico entre la tangente a la dirección de la línea de la plomada en $P$ y el plano del ecuador. Su dominio se suele establecer en: $\frac{\pi}{2} < \Phi < \frac{\pi}{2}$.

- *Longitud astronómica,* $\Lambda$*.* Ángulo medido en sentido directo en el plano del ecuador entre el meridiano astronómico de Greenwich y el plano meridiano que contiene a $P$. Su dominio se suele establecer en: $-\pi < \Lambda \leq \pi$.

[12] El término *elipsoidal* significa 'con forma de elipsoide' por lo que en castellano sería más apropiado referirse a éste tipo de altitudes como *elipsoídica*, es decir 'referida al elipsoide'. La realidad es que coloquialmente el término elipsoidal está más extendido, seguramente por influencia del término inglés *ellipsoidal*.